

L. 09 avril 1938 Sfax	Mathématiques	mercredi: 27-05-2009
2 ^{ème} année : Sciences	Devoir de synthèse n° 3	Durée : 2 ^h

Exercice 1 : (9 points)

On donne $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 2x + 2$ et $g(x) = 1 - \frac{3}{x-3}$

- Montrer que $f(x) = -\frac{1}{2}(x-2)^2 + 4$ puis construire dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) la parabole \mathcal{C}_f (indiquer son sommet S et son axe de symétrie Δ)
- Construire dans le même repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) l'hyperbole \mathcal{C}_g (indiquer son centre I et ses asymptotes \mathcal{D}_1 et \mathcal{D}_2)
 - Donner graphiquement le nombre de solutions de l'équation $f(x) = g(x)$
- Vérifier par le calcul que les points $A(0,2); S(2,4)$ et $B(5, -\frac{1}{2})$ sont les points d'intersection de \mathcal{C}_f et \mathcal{C}_g
- On donne $\mathcal{D} : y = x + 2$
 - Déterminer graphiquement $\mathcal{C}_f \cap \mathcal{D}$
 - Résoudre graphiquement :

$$-\frac{1}{2}(x-2)^2 - x \leq -2 \quad \text{puis} \quad \frac{x-6}{x-3} - 2 \geq x$$
- L'hyperbole \mathcal{C}_g coupe la droite des abscisses (Ox) en \mathcal{C} .
 - Calculer les coordonnées de \mathcal{C} puis résoudre graphiquement $g(x) \leq 0$
 - Ou pose $h(x) = \left| \frac{x-6}{x-3} \right|$. Tracer la courbe \mathcal{C}_h à partir de \mathcal{C}_g

Exercice 2 : (7 points)

Dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) on donne $I(2,1)$ et on désigne par \mathcal{C} le cercle de centre I et de rayon $R = \sqrt{13}$.

- Écrire une équation de \mathcal{C} .
- Vérifier que les points $A(-1,-1); B(-1,3)$ et $C(4,4)$ sont des points de \mathcal{C} .
- Calculer les distances $AB; AC$ et BC puis calculer l'aire de ABC .
- On donne $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\Delta_\alpha : 3x - 2y + \alpha = 0$
 - Déterminer la valeur de α pour que Δ_α passe par I puis vérifier que pour cette valeur $C \in \Delta_\alpha$.
 - Déterminer les valeurs de α pour que Δ_α et \mathcal{C} soient tangents.

Exercice 3 : (4 points)

Dans un plan (P) , on considère un triangle ABC équilatéral de côté a et inscrit dans un cercle (\mathcal{C}) de centre O . On pose $I = B * C$.

Δ est la droite perpendiculaire à (P) en A et $S \in \Delta$ avec $S \neq A$.

- Faites un dessin et montrer que le plan (SAI) est le plan médiateur de $[BC]$.
- Montrer que les plans (SBC) et (SAI) sont perpendiculaires.
- Soit J le point de $[SI]$ tel que $IJ = \frac{1}{3} IS$
 - Montrer que (OJ) et (AS) sont parallèles
 - En déduire que (OJ) est l'axe du cercle (\mathcal{C})
- On suppose que $AS = a$.
Calculer à l'aide de a les distances $OJ; AJ$ et SJ .